

**Приложение 1. Методика управления
предприятиями**

(ЦЕЛЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ В КОРПОРАЦИЯХ)

**Москва
1999**

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ I. ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДИЧЕСКОГО ПОДХОДА.....	3
РАЗДЕЛ II. ОПИСАНИЕ ОБЩЕЙ ПРОЦЕДУРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ	4
2.01 ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ И НАБЛЮДЕНИЙ	4
2.02 ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ	5
2.03 ВЫЧИСЛЕНИЕ УПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ.....	5
2.04 УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ	6
РАЗДЕЛ III. МОДЕЛЬ МАТЕРИАЛЬНО-ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ ПРЕДПРИЯТИЯ	6
РАЗДЕЛ IV. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ММФП	8
РАЗДЕЛ V. СВЯЗЬ УПРАВЛЯЕМЫХ И НЕУПРАВЛЯЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ ММФП	12
РАЗДЕЛ VI. РЕАЛИЗАЦИЯ ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЕМ	17
РАЗДЕЛ VII. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕАЛИЗАЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЕМ	20
7.01 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ.....	20

1.01 Характеристика методического подхода

Качество управления предприятием как хозяйствующим субъектом рыночных отношений существенно зависит от той информации, которая может быть получена путем оценки и обработки значений параметров его хозяйственной деятельности. Поскольку такая информация, как правило, бывает неточной, что обусловлено свойствами как "агрессивной" рыночной среды, так и недостатками корпоративных информационных систем (КИС), то автоматизированные системы управления предприятиями (СУП) следует отнести к классу стохастических систем управления с обратной связью.

Задача синтеза оптимальной СУП ставится следующим образом. Разрабатывается математическая модель предприятия в виде дифференциальных уравнений, и задаются ограничения, краевые условия; уравнения, описывающие параметры наблюдения; критерий оптимальности управления и характеристики случайных воздействий.

Для решения подобных стохастических задач оптимального управления могут быть использованы специальные методы, в том числе стохастический принцип максимума, метод динамического программирования и др.^{1, 2, 3}.

Особенности предлагаемой методики управления:

1. Математической моделью предприятия является модель материально-финансовых потоков (ММФП), описывающая "перемещение" активов и пассивов предприятия из одного состояния в другое.

2. В качестве методов управления используется метод динамического программирования и методы, основанные на сведении стохастических задач оптимального управления к задачам оптимальной оценки состояния предприятия и синтеза детерминированного оптимального управляющего воздействия.

3. Программная реализация методов управления составляют теоретическую основу системы поддержки принятия управленческих решений (СППУР).

4. Предполагается, что действия управленца - лица, принимающего решение, (ЛПР) ограничиваются санкционированием "перемещения" активов или пассивов из одного состояния в другое (платежи, сдача в аренду и залог имущества и т.п.), а "проект" таких решений вырабатывается в СППУР.

Последовательность изложения методики :

1. В разделе II описан общий методический подход к управлению стохастическими объектами, выбранный для реализации в настоящей методике.

2. В разделе III описывается ММФП, используемая для вычисления показателей хозяйственной деятельности предприятия.

3. В разделе IV приведены формулы для расчета показателей финансовой деятельности предприятия

4. В разделе V описана функциональная связь управляемых и неуправляемых параметров ММФП.

5. В разделе VI представлен детализированный алгоритм вычисления оптимального управляющего воздействия.

1.02 Описание общей процедуры вычисления оптимального управляющего воздействия

(а) Описание пространства состояний и наблюдений

Пусть только m параметров предприятия доступно наблюдению. Обозначим множество таких параметров вектором наблюдений \bar{Y} .

Пусть n параметров предприятия являются критическими параметрами (параметрами состояния). Обычно критическими параметрами являются агрегированные показатели, характеризующие динамику развития и балансовые характеристики предприятия в целом (достаточность капитала, соотношение капитала и суммы активов, ликвидность баланса, риск активных операций и т.д.). Обозначим множество параметров состояния вектором состояний \bar{C} . В принципе вектор \bar{C} может совпадать с вектором \bar{Y} , быть частью его, совпадать частично или полностью отличаться. Однако, наличие функциональной связи между этими векторами обязательна.

Пусть на интервале времени $t \in (t_0, t_0 + \tau)$ проводятся наблюдения \bar{Y} , которые связаны с состояниями финансовой системы S следующим образом:

$$\bar{Y}(t) = D(t) \otimes \bar{C}(t) + \bar{W}_n(t), \text{ где} \quad (a1)$$

\otimes - символ матрично-векторного произведения;

\bar{W}_n - ошибки (погрешности) наблюдения, которые могут вызываться различными факторами (например, методической ошибкой исполнительного директора; погрешностями анализа, проводимого отделом маркетинга и т.д.);

D - заданная матрица коэффициентов.

Тогда изменение параметров состояния во времени описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$d \bar{C}(t) / dt = A(t) \otimes \bar{C}(t) + B(t) \otimes \bar{U}(t) + \bar{W}_0(t), \text{ где} \quad (a2)$$

\bar{U} - искомый вектор регулирующего воздействия;

B, A - матрицы коэффициентов;

\bar{W}_0 - флуктуации, вызванные воздействием внешней среды или ошибками исполнительных директоров, приводящие к отклонению от Целевой программы предприятия (ЦПП),

$$M\{\bar{W}_0\} = \bar{0}; M\{\bar{W}_0(t) \otimes \bar{W}_0^T(t')\} = Q_0(t) * \delta(t-t'),$$

$$M\{\bar{W}_n\} = \bar{0}; M\{\bar{W}_n(t) \otimes \bar{W}_n^T(t')\} = R_0(t) * \delta(t-t'),$$

$\bar{0}$ - нулевой вектор,

$$M\{\bar{W}_0(t) \otimes \bar{W}_n^T(t')\} = S_0(t) * \delta(t-t'),$$

Q_0 - ковариационная (дисперсионная) матрица процесса W_0 ,

R_0 - ковариационная (дисперсионная) матрица процесса W_n ,

^T - символ транспонирования,
 δ - функция Кронекера.

(b) Оптимальная оценка состояния предприятия

В предлагаемой методике для управления предлагается использовать известный и апробированный на практике метод оценивания параметров состояния динамической системы по результатам наблюдений - фильтр Калмана-Бьюси ⁴.

Оценка \bar{C}^{\wedge} вектора состояния \bar{C} находится решением следующего матричного дифференциального уравнения:

$$d \bar{C}^{\wedge} (t) / dt = A(t) \otimes \bar{C}^{\wedge} (t) - B(t) \otimes \bar{U}(t) + K_0 (t) \otimes [\bar{Y} (t) - D(t) \otimes \bar{C}^{\wedge} (t)], \text{ где} \quad (a3)$$

$K_0 (t)$ - матрица коэффициентов усиления фильтра (для некоррелированных "шумов" W_0 и W_n , т.е. $S_0 (t) = 0$):

$$K_0 (t) = P(t) \otimes D^T(t) \otimes R_0^{-1}(t); \quad (a4)$$

$P(t)$ - матрица ковариации (дисперсионная матрица) ошибки оценивания $\Delta \bar{C}^{\wedge} = \bar{C} - \bar{C}^{\wedge}$, являющаяся решением следующего дифференциального уравнения Риккати (дисперсионного уравнения) с заданным начальным условием $P(t_0)$:

$$dP(t) / dt = A(t) \otimes P(t) + P(t) \otimes A^T(t) - P(t) \otimes D^T(t) \otimes R_0^{-1} (t) \otimes D(t) \otimes P(t) + Q_0(t), \quad (a5)$$

$$P(t_0) = M \{ [\bar{C}(t_0) - M [\bar{C}(t_0)] \otimes [\bar{C}(t_0) - M [\bar{C}(t_0)]^T] \}.$$

Возможные способы решения уравнения Риккати описаны в разделе VII.

(c) Вычисление управляющего воздействия

В общем случае минимизируемый квадратичный критерий J оптимальности управления предприятием можно описать следующим образом.

$$J = M \{ \bar{C}^T(t_0 + \tau) \otimes F \otimes \bar{C} (t_0 + \tau) + \int_{t_0}^{t_0+\tau} [\bar{C}^T(t) \otimes Q(t) \otimes \bar{C} (t) + U^T(t) \otimes R(t) \otimes U(t)] dt \}, \text{ где} \quad (a6)$$

F, Q - неотрицательно-определенные симметричные матрицы;
 R - положительно-определенная симметричная матрица.

Искомый (минимизирующий критерий J) вектор регулирующего воздействия (проект ЦПП, стратегического плана маркетинга, плана действий) имеет следующий вид:

$$\bar{U}^{\wedge} (t) = - R_0 (t)^{-1} \otimes B(t)^T \otimes L(t) \otimes \bar{C}^{\wedge} (t), \text{ где} \quad (a7)$$

симметричная матрица L определяется из матричного уравнения Риккати

$$dL / dt = - L \otimes A - A^T \otimes L + L \otimes B \otimes R^{-1} \otimes B^T \otimes L - Q, \quad (a8)$$

при граничном условии $L(t_0 + \tau) = F$.

Интеграл от первого элемента подынтегрального выражения в (а6) является интегральной квадратичной ошибкой и характеризует качество регулирования на всем интервале τ . Интеграл от второго элемента подынтегрального выражения в (а6) есть взвешенная "энергия" управления. Он включается в критерий для ограничения издержек на управление, что обеспечивается выбором весовой функции $R(t)$.

(d) Условия реализации алгоритма оптимального управления

Основными условиями практической реализации описанного алгоритма оптимального управления (а1) - (а8) является выполнение следующих обязательных шагов:

- a) Разработка математической модели предприятия (а2).
- b) Обоснование достаточного для управления предприятием множества параметров управления - \bar{U} .
- c) Задание рационального множества параметров наблюдения \bar{Y} (а1).
- d) Выбор конкретного критерия оптимальности управления J (а6).

1.03 Модель материально-финансовых потоков предприятия

ММФП предприятия предназначена для описания функциональной взаимосвязи между производственными основными показателями предприятия и вычисления проектов управляющих воздействий, предъявляемых ЛПП. ММФП описывает взаимосвязи только тех показателей, которые могут быть непосредственно вычислены по данным финансовой отчетности, т.е. являются подмножеством множества параметров наблюдения. Это подмножество должно быть достаточно полным, чтобы по известным значениям этого подмножества можно было вычислить значения всего множества параметров наблюдения.

Основная задача ЛПП - соблюдение баланса между входными и выходными финансовыми потоками предприятия, обеспечивающего исполнение ЦПП. Важнейшей характеристикой материально-финансовых потоков является интенсивность переходов λ_{ij} активов и пассивов предприятия из состояния i в состояние j . На **Рис.** схематично изображены основные состояния, в которых могут находиться активы и пассивы предприятия. Направления "перемещений" уже существующих или будущих активов и пассивов предприятия изображены в виде связей между следующими состояниями:

- a) Состояние "Амортизация" - характеризуется величиной амортизированной стоимости активов C_0 .
- b) Состояние "Формирование акционерного капитала" - характеризуется отрицательной стоимостью инвестиций акционеров предприятия C_1 .
- c) Состояние "Операции на рынке ссудного капитала" - характеризуется вектором-столбцом \bar{C}_2 отрицательных значений обязательств предприятия, возникших на различных секторах ссудного капитала.
- d) Состояние "Материальные и нематериальные активы" - характеризуется вектором-столбцом \bar{C}_3 текущих стоимостей активов. Элементы вектора \bar{C}_3 находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами вектора описания ма-

териальных и нематериальных активов \bar{A}_3 . Примерами элементов вектора \bar{C}_3 являются:

\bar{C}_3^{TFA} (\bar{A}_3^{TFA}) основные долгосрочные активы (ДА) - основные фонды (tangible fixed assets или plant assets),

\bar{C}_3^{INV} (\bar{A}_3^{INV}) - товарно-материальные запасы (ТМЗ) (товарные запасы, производственные запасы, готовая продукция - inventories),

\bar{C}_3^{AR} (\bar{A}_3^{AR}) - дебиторская задолженность (accounts receivable),

\bar{C}_3^{img} (\bar{A}_3^{img}) - имидж предприятия.

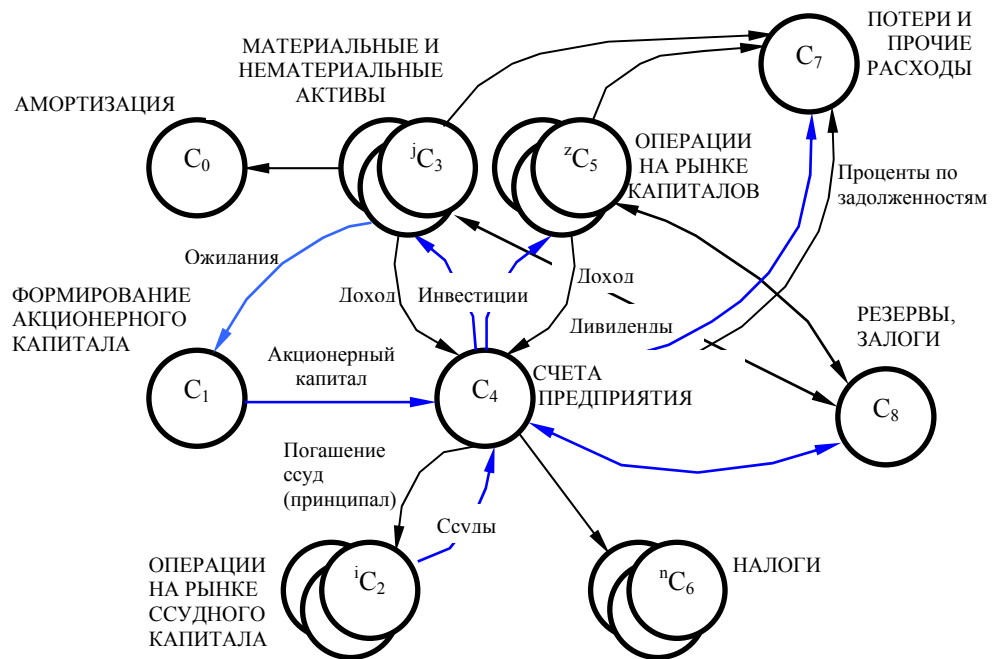


Рис. Схема материально-финансовых потоков

е) Состояние "Счета предприятия" - характеризуется общим объемом C_4 свободных денежных средств, находящихся в распоряжении предприятия.

ф) Состояние "Операции на рынке капиталов" - характеризуются вектором-столбцом \bar{C}_5 текущих стоимостей (с учетом ликвидности) активов \bar{A}_5 в виде:

- акций других предприятий,
- выданных предприятием ссуд,
- государственных и корпоративных облигаций и т.п.,
- а также C_5^{AR} - дебиторской задолженности (accounts receivable) .

Элементы вектора \bar{C}_5 находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами вектора описания активов \bar{A}_5 .

г) Состояние "Налоги" - характеризуется вектором-столбцом \bar{C}_6 значений общего объема налоговых платежей, осуществленных за время наблюдения.

h) Состояние "Потери и прочие расходы" - характеризуется суммой C_7 общих за время наблюдения потерь, вызванных снижением ликвидности (liquidity reduce) реализуемых на рынке активов предприятия - C_7^{LR} , а также суммой платежей по

- выплате заработной платы C_7^{SLR} ,
- осуществлению непроизводительных затрат (non-productive outlays) C_7^{NPO} ,
- выплате дивидендов C_7^{Dv} ,
- процентов по задолженностям (interest charges) C_7^{IC} и т.п.

i) Состояние "Резервы, залоги" - характеризуется суммой C_8 временно "замороженных" денежных средств предприятия (с целью формирования тех или иных резервов в соответствии с политикой предприятия или требованиями регулирующих государственных органов).

Все показатели C_i выражаются в денежных единицах.

Изображенная графически схема материально-финансовых потоков может быть представлена в виде системы линейных дифференциальных уравнений следующего образом.

$$dC_0 / dt = \lambda_{30} * C_3, \quad (a9)$$

$$dC_1 / dt = -\lambda_{14} * C_1 + \lambda_{31} * C_3, \quad (a10)$$

$$dC_2 / dt = -\lambda_{24} * C_2 + \lambda_{42} * C_4, \quad (a11)$$

$$dC_3 / dt = -(\lambda_{30} + \lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{38}) * C_3 + \lambda_{43} * C_4, \quad (a12)$$

$$dC_4 / dt = \lambda_{14} * C_1 + \lambda_{24} * C_2 + \lambda_{34} * C_3 - (\lambda_{42} + \lambda_{43} + \lambda_{45} + \lambda_{46} + \lambda_{47} + \lambda_{48}) * C_4 + \lambda_{54} * C_5 + \lambda_{84} * C_8, \quad (a13)$$

$$dC_5 / dt = \lambda_{45} * C_4 - (\lambda_{54} + \lambda_{58}) * C_5, \quad (a14)$$

$$dC_6 / dt = \lambda_{46} * C_4, \quad (a15)$$

$$dC_7 / dt = \lambda_{37} * C_3 + \lambda_{47} * C_4 + \lambda_{57} * C_5, \quad (a16)$$

$$dC_8 / dt = \lambda_{48} * C_4 - (\lambda_{83} + \lambda_{84} + \lambda_{85}) * C_8, \quad (a17)$$

Здесь и далее для сокращения записи используется скалярное представление переменных: $C_j = \bar{C}_j^T \otimes \bar{1}$, $\lambda_j = \bar{\lambda}_j^T \otimes \bar{1}$, где $\bar{}$ - символ вектора-столбца, \otimes - символ скалярного произведения векторов (или матричного произведения), T - символ транспонирования, $\bar{1}$ - единичный вектор-столбец.

1.04 Вычисление показателей хозяйственной деятельности с использованием ММФП

Покажем, что описанная выше ММФП является достаточной для проведения вычислений основных показателей хозяйственной деятельности. Для этого рассмотрим пример подмножества наблюдаемых на интервале времени $\tau = t_k - t_{k-1}$ (t_{k-1} - момент начала наблюдений) показателей хозяйственной деятельности и способов их

вычисления. Следуя стандарту GAAP, рассмотрим две группы показателей хозяйственной деятельности: *первичные и вторичные*.

К *первичным показателям* K_1, \dots, K_{10} относятся показатели, отражающие причинно-следственные зависимости между результатами хозяйственной деятельности:

1. *Соотношение чистой прибыли P и чистого объема продаж* LS^Z (net profit to net sales) или *норма прибыли от продаж* (return on sales ratio) на временном интервале τ - $K_1 = P / LS^Z$.

В зависимости от целей анализа может быть использовано несколько вариантов расчета чистой прибыли P:

а) Чистая прибыль P_1 после вычета налогов (окончательный итог) на временном интервале τ :

$$P_1 = \left. \vphantom{P_1} \right|_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} (\Delta C_3 + \Delta C_4 + \Delta C_5 + \Delta C_8),$$

где $\left. \vphantom{P_1} \right|_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} \Delta C_i$ - приращение показателя ΔC_i на временном интервале τ .

б) Чистая прибыль до вычета налогов P_2 на временном интервале τ :

$$P_2 = P_1 + \left. \vphantom{P_1} \right|_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} \Delta C_6,$$

с) Прибыль от основной деятельности P_3 (т.е. прибыль без учета прибыли от хозяйственных операций, не входящих в основную деятельность или носящих неповторяющийся, случайный характер) на временном интервале τ :

$$P_3 = \left. \vphantom{P_3} \right|_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} (\Delta C_3^{\sim} + \Delta C_4 + \Delta C_5^{\sim} + \Delta C_6 + \Delta C_8),$$

где ΔC_i^{\sim} - приращение показателя ΔC_i , связанное только с основной деятельностью.

д) Прибыль P_4 до учета результатов хозяйственной деятельности (до вычета затрат на выплату процентов, получения дохода по ценным бумагам и т.п.) на временном интервале τ :

$$P_4 = P_1 + \left. \vphantom{P_1} \right|_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} (\Delta C_1 - \Delta C_2 - \Delta^{54}C_4),$$

где $\Delta^{54}C_4$ - приращение показателя ΔC_4 , вызванное доходом от операций на рынке капиталов.

е) Прибыль P_5 до выплат владельцам компании на временном интервале τ :

$$P_5 = P_1 + \left. \vphantom{P_1} \right|_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} \Delta^{41}C_1,$$

где $\Delta^{41}C_1$ - приращение показателя ΔC_1 , вызванное выплатами дивидендов.

Чистый (с учетом ликвидности товаров услуг) объем продаж может быть вычислен следующим образом:

$${}_L S^\Sigma = \left. \right|_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} (\Delta^{34} C_4 + \Delta^{54} C_4),$$

где $\Delta^{34} C_4$ - приращение показателя ΔC_4 , вызванное доходом от использования материальных и нематериальных активов в хозяйственной деятельности.

2. *Соотношение чистого объема продаж и общей стоимости активов (asset utilization ratio или asset management ratio) на временном интервале τ - $K_2 = S^\Sigma / A^\Sigma$, где общая стоимость активов.*

$$A^\Sigma = C_3 + C_4 + C_5 + C_8.$$

3. *Средний срок поступления платежей по дебиторской задолженности (collection period of accounts receivable) на временном интервале τ - K_3 .*

$$K_3 = \frac{\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} [\bar{T}_3(t) \otimes \bar{V}_{34}(t)] dt}{\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} \bar{V}_{34}(t) dt} + \frac{\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} [\bar{T}_5(t) \otimes \bar{V}_{54}(t)] dt}{\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} \bar{V}_{54}(t) dt},$$

где \bar{T}_3^{AR} , \bar{T}_5^{AR} - усредненные на временном интервале dt задержки поступления платежей по дебиторской задолженности, возникающей при реализации каждого из активов, описываемых векторами \bar{A}_3 , \bar{A}_5 .

4. *Коэффициент оборачиваемости товарно-материальных запасов K_4 .*

Вычисляется как отношение себестоимости S^Σ реализованной продукции (услуг) и средней стоимости $\wedge C_3^{INV}$ ТМЗ (inventory turnover ratio или cost of sales to inventory ratio) на временном интервале τ - $K_4 = S^\Sigma / \wedge C_3^{INV}$, где

$$S^\Sigma = {}_L S^\Sigma + \left. \right|_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} \Delta C_7^{LR},$$

$$\wedge C_3^{INV} = \frac{\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} C_3^{INV}(t) dt}{\tau}.$$

5. *Коэффициент оборачиваемости основных средств или фондоотдача (net sales to fixed assets) - K_5 .*

$$K_5 = {}_L S^\Sigma / \wedge C_3^{TFA}, \wedge C_3^{TFA} = \frac{\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} C_3^{TFA}(t) dt}{\tau}, \text{ где}$$

$\wedge C_3^{TFA}$ - средняя на временном интервале τ стоимость основных средств.

6. Дополнительные удельные показатели, характеризующие эффективность использования активов.

6.1. Количество дней, в течение которых объем реализованной продукции (услуг) будет равняться сумме находящихся на балансе наличных средств и краткосрочных инвестиций (day's sales in cash and short-term investments) - K_6 .

$$K_6 = (C_4 + C_5^{ST}) / L S^{\Sigma} * \tau, \text{ где}$$

\bar{C}_5^{ST} - составляющая вектора \bar{C}_5 , соответствующая краткосрочным инвестициям.

6.2. Количество дней, в течение которых объем реализованной продукции (услуг) будет равняться сумме находящихся на балансе прочих текущих активов (day's sales in cash and other current assets) - K_7 .

$$K_7 = (C_4 + C_5 - C_5^{ST} + C_8^{ST}) / L S^{\Sigma} * \tau, \text{ где}$$

C_8^{ST} - краткосрочная составляющая резерва C_8 .

6.3. Количество дней, в течение которых объем реализованной продукции (услуг) будет равняться сумме находящихся на балансе прочих нетекущих активов (day's sales in other non-current assets) - K_8 .

$$K_8 = (C_5^{LT} + C_8^{LT}) / L S^{\Sigma} * \tau, \text{ где}$$

C_5^{LT} - составляющая C_5 , которая может быть отнесена к долгосрочным инвестициям или задолженностям перед предприятием;

C_8^{LT} - долгосрочная составляющая резерва C_8 .

7. Коэффициент оборачиваемости собственного капитала - отношение чистого объема продаж и собственного капитала (net sales to net worth) - $K_9 = L S^{\Sigma} / W^{net}$, где

$$W^{net} = C_4 + C_5 + C_6 + C_8 + C_2.$$

8. Соотношение долгосрочной задолженности и общей стоимости долгосрочных (нетекущих) активов - K_{10} .

$$K_{10} = - C_2^{LT} / (C_3^{TFA} + C_5^{LT} + C_8^{LT}), \text{ где}$$

C_2^{LT} - долгосрочная составляющая вектора C_2 .

К вторичным показателям K_{11}, \dots, K_{18} относятся показатели, характеризующие эффективность работы предприятия с финансовой точки зрения:

1. Рентабельность собственного капитала (net profit to net worth) - соотношение чистой прибыли и собственного капитала предприятия (return on equity ratio) - $K_{11} = P / W^{net} * 100\%$.

2. Соотношение заемных и собственных средств (total liabilities to net worth) или соотношение задолженности и собственного капитала (debt-to-equity ratio) - $K_{12} = C_2 / W^{net}$.

3. Соотношение текущих обязательств и собственного капитала (current liabilities to net worth) или соотношение текущей задолженности и собственного капитала владельцев компании (current debt-to-equity ratio или current debt-to-worth ratio)- $K_{13} = C_2^{ST} / C_1$, где C_2^{ST} - краткосрочная составляющая вектора C_2 .

4. Соотношение чистого объема продаж и оборотных средств компании (net sales to working capital) или коэффициент достаточности оборотного капитала (working capital sufficiency ratio) - $K_{14} = (I S^Z / \tau * 365) / W^{WC}$, где

$$W^{WC} - \text{оборотные средства} , W^{WC} = C_2^{ST} + C_4 + C_5^{ST} + C_8^{ST} .$$

5. Коэффициент адекватности текущих активов (current ratio)- соотношение текущих активов и текущих обязательств (current assets to current liabilities) или баланс оборотных средств (working capital balance) - $K_{14} = (C_4 + C_5^{ST} + C_8^{ST}) / C_2^{ST}$.

6. Коэффициент моментальной ликвидности (quick ratio)- соотношение суммы наличных средств, краткосрочных инвестиций и дебиторской задолженности с суммой текущих обязательств (cash plus short-term investments plus accounts receivable to current liabilities) - $K_{15} = (C_4 + C_5^{ST} + C_8^{ST} + C_3^{AR} + C_5^{AR}) / C_2^{ST}$.

7. Соотношение суммарной стоимости нетекущих активов и собственного капитала (total non-current assets to net worth или non-current assets to equity ratio) - $K_{16} = (C_3^{TFA} + C_5^{LT} + C_8^{LT}) / C_1$.

8. Соотношение долгосрочной задолженности и оборотных средств (long-term liabilities to working capital) или коэффициент зависимости оборотных средств (working capital dependency ratio) - $K_{17} = C_2^{LT} / W^{WC}$.

9. Рентабельность активов (return of assets) - соотношение чистой прибыли и общей стоимости активов компании (net profit to total assets) - $K_{18} = P / A^Z * 100\%$.

1.05 Связь управляемых и неуправляемых параметров ММФП

В соответствии с определенной выше компетенцией ЛППР и математической ММФП предприятия ЛППР может осуществлять дискретное управление капиталом в моменты времени $t_k = t_{k-1} + \tau$, изменяя значения тех или иных составляющих вектора \bar{V} . Часть составляющих вектора \bar{V} находятся вне области оперативного управления и зависят как от свойств среды (внешней и внутренней), так и от действий ЛППР.

К области оперативного управления можно отнести следующие составляющие вектора $\bar{V} : V_{14}, V_{24}$, некоторые составляющие вектора \bar{V}_{48} (нерегулируемые государственными органами), $\bar{V}_{43}, \bar{V}_{45}$, некоторые составляющие вектора \bar{V}_{47} (например, скорость перечисления дивидендов - V_{47}^{Dv}). Эти составляющие будем называть *управляемыми параметрами* - \bar{V}^{CTRL} .

Опишем функциональные связи составляющих вектора \bar{V} , находящихся вне области оперативного управления, с управляемыми параметрами \bar{V}^{CTRL} . Знание таких связей необходимо, в частности, для вычисления матрицы A - матрицы параметров ММФП.

1. Скорость амортизации $V_{30}(t_k)$.

$$V_{30}(t_k) = \sum_j {}^j V_{30}(t_k), \quad {}^j V_{30}(t_k) = {}^j Pr^{CC}_3 / \tau * dt,$$

где ${}^j Pr^{CC}_3$ - суммарный за время наблюдения τ износ активов (capital consumption) j -ой группы, принадлежащий множеству активов \bar{A}_3^{TFA} :

$${}^j Pr^{CC}_3 = [{}^{\wedge} Pr^{RC}(t_{k-1}) - {}^{\wedge} Pr^{RC}(t_k)] * {}^{\wedge} N_3^A, \text{ где}$$

${}^{\wedge} N_3^A$ - усредненное на интервале времени τ количество активов группы j ;

${}^{\wedge} Pr^{RC}(t_k)$ - средневзвешенная (по количеству приобретаемых в одно время активов) остаточная стоимость (remain cost) активов группы j .

Остаточная стоимость ${}^{\wedge} Pr^{RC}$ в момент приобретения актива равна начальной стоимости актива (first cost) группы j - ${}^j Pr_3^{FC}$ (средняя рыночная стоимость).

${}^{\wedge} N_3^A$ является функцией параметра управления ${}^j V_{43}$ (j -я составляющая вектора \bar{V}_{43}):

$${}^{\wedge} N_3^A = [2 * {}^j N_3^A(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} {}^j V_{43}(t) / {}^j Pr_3^{FC}(t) * dt] / 2, \text{ при условии, что}$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} {}^j V_{43}(t) dt \leq {}^j M_3^{BUYmax}(\tau), \text{ где}$$

${}^j M_3^{BUYmax}(\tau)$ - потенциально достижимая емкость рынка предложения товаров (услуг) из группы j , которую предприятие способно "охватить" за время τ ;

${}^j N_3^A(t_{k-1})$ - количество активов группы j в начале интервала наблюдения.

Т.о., скорость амортизации V_{30} является как функцией скорости V_{43} , так и функцией параметров внешней среды ${}^j Pr_3^{FC}$.

2. Скорость поступления доходов от использования материальных и нематериальных активов $V_{34}(t_k)$.

Предполагается, что любой актив может рассматриваться в качестве товара, который может быть реализован на рынке.

$$V_{34}(t_k) = \sum_j {}^j V_{34}(t_k),$$

$${}^j V_{34}(t_k) = {}^j M_3^{SEL}(\tau) / \tau * dt, \text{ где}$$

${}^jM_3^{SEL}(\tau)$ - емкость рынка спроса на товары (услуги) из группы j , которую предприятие "осваивает" за время τ ;

$${}^jM_3^{SEL}(\tau) = \text{Min}\{\wedge^jPr_3^{DC}(t_k) * \wedge^jN_3^A * [1 - {}^jR_3^A(t_k)] * {}^j\rho_3^{SEL}, {}^jM_3^{SELmax}(\tau)\}, \text{ где}$$

${}^jM_3^{SELmax}(\tau)$ - емкость рынка

спроса на товары (услуги) из группы j , которую предприятие потенциально способно "освоить" за время τ ;

$\wedge^jPr_3^{DC}$ - усредненная (по рынку) стоимость спроса (demand cost) на активы группы j с остаточной стоимостью $\wedge^jPr_3^{RC}(t_k)$;

${}^jR_3^A \in [0, 1]$ - риск операции по реализации актива группы j (ликвидность актива = $1 - {}^jR_3^A$);

${}^j\rho_3^{SEL} \in [0, 1]$ - доля активов из группы j , продаваемая на интервале τ .

Из функциональной зависимости параметров $\wedge^jN_3^A$ и ${}^jV_{43}$, описанной выше, следует, что скорость поступления доходов от использования материальных и нематериальных активов $V_{34}(t_k)$ является функцией не только параметров внешней среды ${}^jM_3^{BUYmax}(\tau)$ и ${}^jM_3^{SELmax}(\tau)$, но параметра управления V_{43} .

P.S. Описанный способ расчета скорости поступления доходов от использования материальных и нематериальных активов справедлив для всех видов активов из групп активов A_3^{TFA} и A_3^{INV} за исключением активов, переданных предприятию в аренду. Такие активы не могут быть реализованы на рынке до момента их выкупа на условиях договора аренды.

3. *Скорость поступления доходов от операций на рынке капиталов $V_{54}(t_k)$.*

$$V_{54}(t_k) = \sum_j {}^jV_{54}(t_k),$$

$${}^jV_{54}(t_k) = {}^jM_5^{SEL}(\tau) / \tau * dt, \text{ где}$$

${}^jM_5^{SEL}(\tau)$ - емкость рынка реализации активов из группы j , которую предприятие "осваивает" за время τ ;

$${}^jM_5^{SEL}(\tau) = \text{Min}\{\wedge^jPr_5^{DC}(t_k) * \wedge^jN_5^A * [1 - {}^jR_5^A(t_k)] * {}^j\rho_5^{SEL}, {}^jM_5^{SELmax}(\tau)\},$$

$$\wedge^jN_5^A = [2 * {}^jN_5^A(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} {}^jV_{45}(t) / {}^jPr_5^{FC}(t) * dt] / 2, \text{ при условии, что}$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} {}^jV_{45}(t) dt \leq {}^jM_5^{BUYmax}(\tau), \text{ где}$$

${}^jM_5^{BUYmax}(\tau)$ - потенциально достижимая емкость рынка предложения активов из группы j , которую предприятие способно "охватить" за время τ ;

${}^jM_5^{SELmax}(\tau)$ - емкость рынка спроса на активы из группы j , которую предприятие потенциально способно "освоить" за время τ ;

${}^jN_5^A(t_{k-1})$ - количество активов группы j в начале интервала наблюдения;

$\wedge^jPr_5^{DC}$ - средневзвешенная (по величине спроса) и усредненная (по рынку) стоимость спроса (demand cost) на активы группы j с накопленной средневзвешенной (по объемам операций) стоимостью (accumulated cost) $\wedge^jPr_5^{AC}(t_k)$;

${}^jPr_3^{FC}$ - начальная стоимость актива (first cost) группы j - (средняя рыночная цена предложения);

$\wedge N_5^A$ - усредненное на интервале времени τ количество активов группы j ;

${}^jR_5^A \in [0, 1]$ - риск операции по реализации актива группы j (ликвидность актива = $1 - {}^jR_5^A$);

${}^j\rho_5^{SEL} \in [0, 1]$ - доля активов из группы j , продаваемая на интервале τ .

Из функциональной зависимости параметров $\wedge N_5^A$ и ${}^jV_{45}$, описанной выше, следует, что скорость поступления доходов от операций на рынке капиталов $V_{34}(t_k)$ является функцией не только параметров внешней среды ${}^jM_5^{BUYmax}(\tau)$ и ${}^jM_5^{SELMAX}(\tau)$, но параметра управления V_{45} .

4. *Скорость снижения ликвидности материальных и нематериальных активов $V_{37}(t_k)$.*

Вычисляется аналогично параметру $V_{34}(t_k)$.

$$V_{37}(t_k) = \sum_j {}^jV_{37}(t_k),$$

$${}^jV_{37}(t_k) = \text{Min} \{ {}^jPr_3^{DC}(t_k) * \wedge N_3^A * {}^jR_3^A(t_k) * {}^j\rho_3^{SEL}, {}^jM_3^{SELMAX}(\tau) \} / \tau * dt.$$

Из функциональной зависимости параметров $\wedge N_3^A$ и ${}^jV_{43}$, описанной выше, следует, что скорость снижения ликвидности материальных и нематериальных активов $V_{37}(t_k)$ является функцией не только параметров внешней среды ${}^jM_3^{BUYmax}(\tau)$ и ${}^jM_3^{SELMAX}(\tau)$, но параметра управления V_{43} .

5. *Скорость снижения ликвидности активов, приобретенных на рынке капиталов $V_{57}(t_k)$.*

Вычисляется аналогично параметру $V_{54}(t_k)$.

$$V_{57}(t_k) = \sum_j {}^jV_{57}(t_k),$$

$${}^jV_{57}(t_k) = \text{Min} \{ {}^jPr_5^{DC}(t_k) * \wedge N_5^A * {}^jR_5^A(t_k) * {}^j\rho_5^{SEL}, {}^jM_5^{SELMAX}(\tau) \} / \tau * dt.$$

Из функциональной зависимости параметров $\wedge N_5^A$ и ${}^jV_{45}$, описанной выше, следует, что скорость снижения ликвидности активов на рынке капиталов $V_{57}(t_k)$ является функцией не только параметров внешней среды ${}^jM_5^{BUYmax}(\tau)$ и ${}^jM_5^{SELMAX}(\tau)$, но параметра управления V_{45} .

6. *Скорость погашения задолженностей (погашения принципала задолженности) $V_{42}(t_k)$.*

$${}^jV_{42}(t_k) = {}^jV_{24}(t_k - \wedge T_2^P), \text{ где}$$

$\wedge T_2^P$ - средневзвешенная (по объемам операций) длительность пассивных операций j -ой группы;

Т.о. параметр ${}^jV_{42}$ находится в прямой функциональной зависимости от параметра управления ${}^jV_{24}$.

7. *Скорость перечисления процентов по задолженностям $V_{47}^L(t_k)$.*

$$V_{47}(t_k) = \sum_j [{}^jV_{47}^{Ln}(t_k) + {}^jV_{47}^{Dv}(t_k)],$$

${}^jV_{47}^{Ln}(t_k) = {}^jV_{24}(t_k - {}^{\wedge}T_2^P) * {}^{\wedge}PerL_2(t_k - {}^{\wedge}T_2^P) * {}^{\wedge}T_2^P / 365$, где

${}^{\wedge}PerL_2(t_k - {}^{\wedge}T_2^P)$ - средневзвешенная (по объемам операций) стоимость задолженностей (в процентах годовых) j-й группы,

${}^jV_{47}^{Dv}(t_k)$ - скорость перечисления дивидендов.

Т.о. параметр ${}^jV_{47}$ находится в прямой функциональной зависимости от параметров управления ${}^jV_{24}$ и ${}^jV_{47}^{Dv}$.

8. *Скорость перечисления налогов $V_{46}(t_k)$.*

Все возможные виды налогов \bar{Tax} (вектор нормы налога) условно разделим на 3 группы:

а) Налоги на платежи (payment tax) - \bar{Tax}^{PmT} (налог на заработную плату, налог с оборота, акцизы и т.д.). Привязаны к моменту осуществления платежей и поэтому имеют нерегулярный (случайный характер).

б) Налоги на прибыль (profit tax) - \bar{Tax}^{Prf} . Характеризуются периодичностью налоговых платежей.

с) Налоги на имущество (assets tax) - \bar{Tax}^{AsT} (налог на недвижимость, налог на капитал и т.д.). Характеризуются периодичностью налоговых платежей.

Все нормы налогов \bar{Tax}^{Pmt} , \bar{Tax}^{Prf} , \bar{Tax}^{Ast} выражаются в процентах.

$V_{46}(t_k) = V_{46}^{PmT}(t_k) + V_{46}^{Prf}(t_k) + V_{46}^{AsT}(t_k)$, где

$$V_{46}^{PmT}(t_k) = \left[\sum_n \left\{ {}^nTax_{14}^{Pmt} * \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} {}^nV_{14}(t) * dt \right\} + \right. \\ \left. \sum_i \left\{ {}^iTax_{24}^{Pmt} * \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} {}^iV_{24}(t) * dt \right\} + \right. \\ \left. \sum_j \left\{ {}^jTax_{43}^{Pmt} * \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} {}^jV_{43}(t) * dt \right\} + \right. \\ \left. \sum_k \left\{ {}^kTax_{45}^{Pmt} * \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} {}^kV_{45}(t) * dt \right\} \right] / \tau / 100\% * dt, \text{ где}$$

$$V_{46}^{Prf}(t_k) = [C_3(t_k) + C_4(t_k) + C_5(t_k) - C_3(t^{Prf}) - C_4(t^{Prf}) - C_5(t^{Prf})] * \\ B^{Prf}(t_k) * Tax^{Prf} / (t_k - t^{Prf}) / 100\% * dt,$$

$$V_{46}^{AsT}(t_k) = \left\{ \sum_j \left[{}^jC_3(t_k) - {}^jC_3(t^{Ast}) \right] * {}^jTax^{Ast} \right\} + \\ \left. \sum_k \left\{ [{}^zC_5(t_k) - {}^zC_5(t^{Ast})] * {}^zTax^{Ast} \right\} / (t_k - t^{Ast}) / 100\% * dt, \text{ где}$$

V_{46}^{Pmt} - скорость перечисления налога на платежи,

V_{46}^{Prf} - скорость перечисления налога на прибыль,

V_{46}^{Ast} - скорость перечисления налога на имущества,

${}^nTax_{14}^{Pmt}$ - налог на перемещение капитала из состояния C_1 в состояние C_4 (привлечение акционерного капитала);

${}^jTax_{24}^{Pmt}$ - налог на перемещение капитала из состояния C_2 в состояние C_4 (осуществление займов);

${}^j\text{Tax}_{43}^{\text{Pmt}}$ - налог на перемещение капитала из состояния C_4 в состояние C_3 (приобретение материальных и нематериальных активов);

${}^k\text{Tax}_{45}^{\text{Pmt}}$ - налог на перемещение капитала из состояния C_4 в состояние C_5 (приобретение активов на рынке капиталов),

Tax^{Prf} - налог на прибыль,

Tax^{Ast} - налог на имущество,

t^{Prf} - дата предыдущей оплаты налога на прибыль,

t^{Ast} - дата предыдущей оплаты налога на имущество,

9. Скорость изъятия резервов $V_{84}(t_k)$.

${}^jV_{84}(t_k) = {}^jV_{48}(t_k - \wedge^jT_5^A) * {}^jRsv^A(t_k - \wedge^jT_5^A) / 100\%$, где

$\wedge^jT_5^A$ - средневзвешенная (по объемам операций) длительность активных операций j -ой группы;

${}^jRsv^A$ - норма резервирования активных операций (в процентах).

1.06 Реализация оптимального алгоритма управления предприятием

Детализируем описание процедуры вычисления оптимального управляющего воздействия, представленной в разделе II. Для этого используем ММФП (а9) – (а10).

С целью дальнейшего сокращения записи и удобства вычислений учтем, что интенсивности переходов λ_{ij} связаны со скоростями V_{ij} "перемещения" активов и пассивов из одного состояния в другое следующим образом:

$$\lambda_{ij} = V_{ij} / C_i.$$

V_{ij} вычисляется как количество активов (пассивов) в стоимостном выражении, перемещаемое из состояния i в состояние j за время dt (шаг интегрирования системы дифференциальных уравнений, составляющих ММФП).

Преобразуем ММФП (а9)-(а17) к следующему виду:

$$dC_0 / dt = \lambda_{30} * C_3,$$

$$dC_1 / dt = -V_{14} + V_{31},$$

$$dC_2 / dt = \lambda_{42} * C_4 - V_{24},$$

$$dC_3 / dt = -(\lambda_{30} + \lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{38}) * C_3 + V_{43},$$

$$dC_4 / dt = \lambda_{34} * C_3 - (\lambda_{42} + \lambda_{46} + \lambda_{47}^{\%L} + \lambda_{48}^{\text{GOV}}) * C_4 + \lambda_{54} * C_5 + \lambda_{84} * C_8 + V_{14} + V_{24} - V_{43} - V_{45} - V_{47}^{\text{DV}} - V_{48}^{\text{CTRL}},$$

$$dC_5 / dt = -(\lambda_{54} + \lambda_{58}) * C_5 + V_{45},$$

$$dC_6 / dt = \lambda_{46} * C_4,$$

$$dC_7 / dt = \lambda_{37} * C_3 + \lambda_{57} * C_5 + V_{47},$$

$$dC_8 / dt = \lambda_{48}^{\text{GOV}} * C_4 + (\lambda_{83} + \lambda_{84} + \lambda_{85}) * C_8 + V_{48}^{\text{CTRL}}.$$

В общем случае целевой функцией управления предприятием является та или иная математическая "свертка" показателей хозяйственной деятельности, описанных в разделе IV. Способов построения таких целевых функций бесконечно много, и каждый из них в той или иной степени субъективен. В настоящей методике при определении цели управления учитывается современная тенденция "технологий" оценки эффективности бизнеса, базирующихся на выводах об изменении в перспективе рыночной стоимости акций предприятия.

Поэтому в качестве цели управления предприятием выбирается максимизация цены Pr^{cmp} предприятия на интервале управления, нижняя оценка которой может быть выражена в следующем виде :

$$Pr^{cmp} = {}_L A - C_2^{t\downarrow}, \text{ где}$$

${}_L A$ – текущая сумма ликвидационной стоимости активов,

$C_2^{t\downarrow}$ – текущая общая стоимость задолженности приведенной к настоящему времени,

$${}_L A = \bar{R}_3^A \otimes \bar{C}_3 + C_4 + \bar{R}_5^A \otimes \bar{C}_5 + \bar{R}_8^A \otimes \bar{C}_8 \approx \\ \hat{R}_3^A * C_3 + C_4 + \hat{R}_5^A * C_5 + \hat{R}_8^A * C_8,$$

$$C_2^{t\downarrow} = \sum_j C_{2j}^{t\downarrow} = \sum_j \{C_{2j} / [1 + d\%(T_{2j})/100\%]\} \approx \hat{Dsc}_2 * C_2,$$

\hat{R}_i^A – средневзвешенная по остаточной стоимости ликвидность i -го актива,

\hat{Dsc}_2 – средневзвешенная по объемам задолженностей C_{2j} величина $Dsc_{2j} = [1 + d\%(T_{2j})/100\%]^{-1}$,

$d\%(T_{2j})$ – текущая средняя депозитная ставка в надежных банках при размещении в них денежных средств на время T_{2j} объемом C_{2j} .

Определение именно тенденции изменения цены предприятия в качестве показателя эффективности управления позволяет учесть как тенденции изменения реальной стоимости предприятия, так и тенденции изменения рыночных ожиданий действительных или потенциальных акционеров предприятия.

Предполагается, что приобретение или создание (производство) новых активов осуществляется после выбора активов из ряда альтернативных вариантов (образцов) в соответствии с критерием “обеспечение максимума ликвидности актива в процессе его жизненного цикла”. Аналогично, предполагается, что возникновение новых задолженностей компании происходит после выбора источника заимствований из ряда альтернативных вариантов в соответствии с критерием “обеспечение минимума риска непогашения задолженностей”. Эти два допущения относятся к безусловным правилам разумного поведения персонала, задача контроля исполнения которых не является целью рассматриваемого алгоритма управления. Последнее в полной мере относится к параметрам \hat{R}_i^A и \hat{Dsc}_2 .

С учетом предположения об исполнении правила разумного поведения персонала и особенностей квадратичного критерия оптимальности (6) целью управления будем считать минимизацию параметра $C_9 = Pr^{max} - Pr^{cmp}$, где Pr^{max} – много большая в сравнении с Pr^{cmp} величина.

Дополним модель системы уравнением относительно переменной C_9 :

$$dC_9/dt = - [\hat{R}_3^A * (\lambda_{30} + \lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{38}) + \lambda_{34}] * C_3 + \\ + [\hat{Dsc}_2 * \lambda_{42} + \lambda_{42} + \lambda_{46} + \lambda_{47}^{L\%} + (1 - \hat{R}_8^A) * \lambda_{48}^{GOV}] * C_4 + \\ + [\hat{R}_5^A * (\lambda_{54} + \lambda_{58}) - \lambda_{54}] * C_5 - \\ - [\hat{R}_8^A * (\lambda_{83} + \lambda_{84} + \lambda_{85}) + \lambda_{84}] * C_8 -$$

$$-V_{14} - (\wedge Dsc_2 + 1) * V_{24} + (1 - \wedge R^A_3) * V_{43} + (1 - \wedge R^A_5) * V_{45} + V^{DV}_{47} - (1 - \wedge R^A_8) * V^{CTRL}_{48}.$$

В векторно-матричном виде система дифференциальных уравнений, описывающая изменение параметров компании, выглядит следующим образом :

$$d \bar{C} / dt = A \otimes \bar{C} + B \otimes \bar{U},$$

где $B = E$ – единичная матрица, а матрица коэффициентов A и вектор управления \bar{U} могут быть представлены в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & A_{48} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{64} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{73} & 0 & A_{75} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{84} & 0 & 0 & 0 & A_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{93} & A_{94} & A_{95} & 0 & 0 & A_{98} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A_{03} &= \lambda_{30}, & A_{94} &= \wedge Dsc_2 * \lambda_{42} + \lambda_{42} + \lambda_{46} + \lambda^{%L}_{47} + \\ A_{33} &= -(\lambda_{30} + \lambda_{34} + \lambda_{38}), & & (1 - \wedge R^A_8) * \lambda^{GOV}_{48}, \\ A_{43} &= \lambda_{34}, & A_{45} &= \lambda_{54}, \\ A_{73} &= \lambda_{37}, & A_{55} &= -(\lambda_{54} + \lambda_{58}), \\ A_{93} &= -\wedge R^A_3 * (\lambda_{30} + \lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{38}) - \lambda_{34}, & A_{75} &= \lambda_{57}, \\ A_{24} &= \lambda_{42}, & A_{95} &= \wedge R^A_5 * (\lambda_{54} + \lambda_{58}) - \lambda_{54}, \\ A_{44} &= -(\lambda_{42} + \lambda_{46} + \lambda^{%L}_{47} + \lambda^{GOV}_{48}), & A_{48} &= \lambda_{84}, \\ A_{64} &= \lambda_{46}, & A_{88} &= -(\lambda_{83} + \lambda_{84} + \lambda_{85}), \\ A_{84} &= \lambda^{GOV}_{48}, & A_{98} &= -\wedge R^A_8 * (\lambda_{83} + \lambda_{84} + \lambda_{85}) - \lambda_{84}, \end{aligned}$$

$$\bar{U}^T = \begin{pmatrix} 0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & 0 & U_7 & U_8 & U_9 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= -V_{14} + V_{31}, & U_5 &= V_{45}, \\ U_2 &= -V_{24}, & U_7 &= V_{47}, \\ U_3 &= V_{43}, & U_8 &= V^{CTRL}_{48}, \\ U_4 &= V_{14} + V_{24} - V_{43} - V_{45} - V^{DV}_{47} - V^{CTRL}_{48}, & U_9 &= -V_{14} - (\wedge Dsc_2 + 1) * V_{24} + (1 - \wedge R^A_3) * V_{43} + \\ & & & (1 - \wedge R^A_5) * V_{45} + V^{DV}_{47} - (1 - \wedge R^A_8) * V^{CTRL}_{48}. \end{aligned}$$

Нельзя выработать однозначных рекомендаций для определения матриц $Q(t)$, $R(t)$ и $F(t)$, входящие в критерий оптимальности (аб). Например, в общем случае матрицы $Q(t)$ и $R(t)$ выбираются такими, чтобы начальные ошибки меньше влияли на величину критерия в сравнении с ошибками, возникающими в последующие моменты времени. Можно предложить следующий способ выбора матриц⁵. Рекомендуются брать их диагональными со следующими элементами:

- обратные элементы $1/f_{ii}$ матрицы $F(t)$ равными максимально допустимым значениям $[C_i(t_{k-1} + \tau)]^2$;
- обратные элементы $1/q_{ii}$ матрицы $Q(t)$ – произведениям τ на максимально допустимые значения $[C_i(t)]^2$;

- обратные элементы $1/r_{ii}$ матрицы $R(t)$ – произведениям τ на максимально допустимые значения $[U_i(t)]^2$.

Особенностью рассматриваемой задачи управления является то, что все элементы квадратной матрицы Q равны нулю кроме нижнего правого элемента.

Для рассматриваемой ММФП вектор наблюдений \bar{Y} совпадает с вектором состояний \bar{C} , а матрица D в уравнении наблюдения (1) является единичной матрицей.

1.07 Математические аспекты реализации оптимального алгоритма управления предприятием

(а) Решение матричного уравнения Риккати

Реализация алгоритма оптимального управления предприятием предполагает решение матричных уравнений Риккати (а5), (а8). Для общего случая и искомой матрицы M уравнение Риккати будет выглядеть следующим образом:

$$dM / dt = M \otimes A + A^T \otimes M - M \otimes S \otimes M + Q . \quad (a17)$$

Это уравнение нелинейное и в общем случае аналитически не решается, если даже матрицы A , B , R и Q постоянны. Решение его возможно лишь численными методами. При решении уравнения (а8) интегрированием в обратном времени осуществляется переход к переменной τ . При этом уравнение преобразуется к следующему виду:

$$dM' / d\tau = - M' \otimes A' - (A')^T \otimes M' + M' \otimes S' \otimes M' - Q' , \text{ где}$$

$$K'(t_0) = F ; M' = M(t_{k-1} + \tau), \dots$$

Один из возможных способов решения уравнения (а17) является использование следующего итерационного процесса³. Последовательные приближения решения уравнения (а17) обозначаемые как $M^0, M^1, \dots, M^{n-1}, M^n, \dots$ определяются из дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} dM^0/dt &= A \otimes M^0 + M^0 \otimes A + Q , M^0(t_0) \geq 0 , \\ dM^1/dt &= (A - M^0 \otimes S) \otimes M^1 + M^1 \otimes (A^T - S \otimes M^0) + M^0 \otimes S \otimes M^0 + Q , \\ &\dots \dots \dots \\ dM^n/dt &= (A - M^{n-1} \otimes S) \otimes M^n + M^n \otimes (A^T - S \otimes M^{n-1}) + M^{n-1} \otimes S \otimes M^{n-1} + Q , \end{aligned}$$

где

$$M^i(t_0) = M^0(t_0) \geq 0 \text{ для всех } i.$$

Доказано, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность матриц $M^n(t)$ равномерно сходится к решению $M(t)$ уравнения Риккати.

Удобное представление итеративного решения может быть получено после введения новой переменной

$$\Delta M^n = M^n - M^{n-1} .$$

В этом случае

$$\Delta M^n(t) = - \int_{t_0}^t \{ \Psi_n(t, \tau) \otimes \Delta M^{n-1}(\tau) \otimes S(\tau) \otimes \Delta M^{n-1}(\tau) \otimes \Psi_n^T(t, \tau) \} * d\tau, n \geq 2,$$

где

$$\Psi_n(t, \tau) = \varphi_n(t) \otimes \varphi_n^{-1}(\tau),$$

$\varphi_n(t)$ – фундаментальная матрица (другое название – переходная матрица) решений векторного дифференциального уравнения

$$dy_n/dt = (A_n - M^{n-1} \otimes S) \otimes y_n.$$

Матрица $\varphi_n(t)$ может быть вычислена методом разложения в бесконечный ряд :

$$\varphi_n(t) = \exp(\eta) = E + \eta * t + (\eta * t)^2 / 2! + (\eta * t)^3 / 3! + \dots, \eta = A_n - M^{n-1} \otimes S.$$

Для снижения вычислительной сложности этого ряда можно использовать подходы, базирующиеся на теореме *Сильвестра* и методе *Кэли-Гамильтона*⁶.

Ссылки на литературу :

- ¹ Воронов А.А. и др. Теория автоматического управления. Ч. 2. Теория линейных и специальных систем автоматического управления. /Под ред. А.А.Воронова. - М.: Высш. шк. , 1986.- 504 с.
- ² Остром К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления. /Под ред. Н.С.Райбмана. - М.: Мир, 1973. - 321 с.
- ³ Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. - М.: Наука, 1978.- 552 с.
- ⁴ Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси.- М.: Наука, 1982.-210с.
- ⁵ Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М., 1972.
- ⁶ Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. – М.: Наука, 1970. – 620 с.